

MECÂNICA GERAL - 2/2009

LISTA 11

1. (a) Analise a energia potencial efetiva obtida para o problema de dois corpos sob a ação de uma força central conservativa e determine o raio da órbita circular possível para um planeta (ou cometa) de momento angular ℓ . (Sugestão: olhe para dU_{ef}/dr .)

(b) Mostre que esta órbita circular é estável, no sentido que qualquer pequena perturbação radial provocará apenas pequenas oscilações radiais (olhe para d^2U_{ef}/dr^2 .) Mostre que o período destas oscilações é igual ao período orbital do planeta.

2. No problema 4 da lista 7 você tomou contato com o **teorema do virial** para uma partícula em órbita circular sob a ação de uma força central com energia potencial da forma $U = kr^n$. Vamos agora demonstrar uma forma mais geral deste teorema que se aplica a uma partícula em qualquer órbita periódica.

(a) Determine a derivada temporal da quantidade $G = \vec{r} \cdot \vec{p}$ e, integrando desde 0 até um instante arbitrário t , demonstre que

$$\frac{G(t) - G(0)}{t} = 2 \langle T \rangle + \langle \vec{F} \cdot \vec{r} \rangle$$

onde \vec{F} é a força resultante sobre a partícula e $\langle f \rangle$ denota a média sobre o tempo da quantidade f .

(b) Explique porque, se a órbita da partícula é periódica e se fizermos t suficientemente grande, podemos fazer o lado esquerdo desta equação ser tão pequeno quanto queiramos. Isto é, o lado esquerdo vai a zero quando $t \rightarrow \infty$.

(c) Use este resultado para provar que, se \vec{F} provém de uma energia potencial $U = kr^n$, então $\langle T \rangle = n \langle U \rangle / 2$, se agora $\langle f \rangle$ denota a média temporal tomada sobre um intervalo de tempo muito grande.

3. Um satélite da Terra é observado em seu perigeu a uma altura de 250km acima da superfície terrestre e com uma velocidade de 8500m/s . Determine a excentricidade de sua órbita e sua altura acima da superfície terrestre no apogeu. O raio da Terra é $R_T \approx 6,4 \times 10^6\text{m}$. Você também vai precisar do produto GM_T mas este é fácil de determinar se você lembrar que $GM_T/R_T^2 = g$.

4. O que aconteceria com a órbita da Terra (que podemos, para efeito deste problema, considerar como circular) se metade da massa do Sol subitamente desaparecesse? Nosso planeta continuaria ligado ao sistema solar se isso ocorresse? (Sugestões: considere o que aconteceria com as energias cinética e potencial da Terra no momento do cataclísmico desaparecimento. O teorema do virial para órbitas circulares - problema 4 da lista 7 - ajuda a responder a esta pergunta.) Trate o Sol - ou o que dele restar - como fixo.

5. Suponha que queiramos enviar uma espaçonave ao planeta Netuno usando o método de transferência de órbita discutido em aula. A nave inicia sua viagem numa órbita próxima à da Terra (de raio igual a 1 UA, ou unidade astronômica) e deve terminar sua viagem numa órbita circular próxima de Netuno (de raio 30 UA). Use a 3ª lei de Kepler para mostrar que a órbita de transferência se completará em aproximadamente 31 anos terrestres. (Na prática podemos conseguir um resultado melhor se usarmos uma órbita que possibilite que a espaçonave use o efeito estilingue ao passar pela órbita de Júpiter.)